Spieltheorie Übung 3

Eugen Sawin

May 20, 2012

Aufgabe 3.1

Für alle Beispiele soll $n = 1$ gelten.

A leer: Sei $A = \emptyset$.

Mit $2^A = \{\emptyset\}$ folgt, dass für eine beliebige Funktion $f : A \to 2^A$, für jedes $x \in A$, $f(x) = \emptyset$ gilt. Somit hat f keinen Fixpunkt, da es kein $x \in A$ mit $x \in f(x)$ gibt.

Aus der Verletzung der Bedingung, dass A nicht leer sein darf, folgt somit auch die Verletzung der Bedingung, dass kein $f(x)$ leer sein darf.

A nichtkonvex: Sei $A = \{0, 1\}$, also nicht-leer, kompakt aber nichtkonvex. Sei $f : A \to 2^A$ definiert durch $f(x) = \{1 - x\}$.

Mit $f(0) = \{1\}$ und $f(1) = \{0\}$ gibt es kein $x \in A$ mit $x \in f(x)$, somit hat f keinen Fixpunkt.

Ist A konvex, z.B. $A = [0, 1]$, also $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1\}$, so gibt es für die gleiche Funktion f einen Fixpunkt mit $f(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}\}$.

f nicht ober-hemi-stetig: Sei $A = [0, 1]$ und $f(x) = \{\lceil 1 - x \rceil\}$.

Da $Graph(f) = \{(1, 0)\} \cup \{(x, 1) \mid x \in [0, 1)\}$ keine abgeschlossene Menge bildet, ist f nicht ober-hemi-stetig. Mit $f(1) = \{0\}$ und $f(x) = \{1\}$ für alle $x \in A, x < 1$, gibt es kein $x \in A$ mit $x \in f(x)$, somit hat f keinen Fixpunkt.

Aufgabe 3.2

Nach der Definition des erwarteten Nutzens gilt

$$U_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}) = \sum_{b \in A} \left(\prod_{j \in N \setminus \{i\}} \alpha_j(b_j) \right) \alpha'_i(b_i) u_i(b)$$

Wir unterscheiden jetzt die Fälle $b_i = a_i$, $b_i = a'_i$ und die Aktionen mit unveränderter Verteilung. Dafür sei $B = \{(a_i, b_{-i}) \mid b \in A\}$ die Menge aller Aktionsprofile mit Aktion a_i für Spieler i und $C = \{(a'_i, b_{-i}) \mid b \in A\}$ die Menge aller Aktionsprofile mit Aktion a'_i für Spieler i. Um die Formel kompakt zu halten definieren wir zudem $\alpha' = (\alpha'_i, \alpha_{-i})$.

$$U_i(\alpha') = \sum_{b \in A \setminus B \cup C} \left(\prod_{j \in N} \alpha'_j(b_j) \right) u_i(b) + \sum_{b \in B} \left(\prod_{j \in N} \alpha'_j(b_j) \right) u_i(b) + \sum_{b \in C} \left(\prod_{j \in N} \alpha'_j(b_j) \right) u_i(b)$$

Wegen $\alpha'_i(a_i) = 0$ und $\alpha'_i(b_i) = \alpha_i(b_i)$ für alle $i \in N$ und $b \in A \setminus B \cup C$ folgt

$$U_i(\alpha') = \sum_{b \in A \setminus B \cup C} \left(\prod_{j \in N} \alpha_j(b_j) \right) u_i(b) + \sum_{b \in C} \left(\prod_{j \in N} \alpha'_j(b_j) \right) u_i(b)$$

$$U_i(\alpha') = U_i(\alpha) - \sum_{b \in B} \left(\prod_{j \in N} \alpha_j(b_j) \right) u_i(b) - \sum_{b \in C} \left(\prod_{j \in N} \alpha_j(b_j) \right) u_i(b) + \sum_{b \in C} \left(\prod_{j \in N} \alpha'_j(b_j) \right) u_i(b)$$

Wegen $B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_{-1}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a_i')$ für alle $a_i' \in A_i\}$, $a_i' \in B_i(\alpha_{-i})$ und $a_i \notin B_i(\alpha_{-i})$ folgt, dass für alle $b \in B$ und $b' \in C$ gilt $u_i(b') > u_i(b)$. Zudem wurden bei der Verteilung α' die Wahrscheinlichkeiten aller $b' \in C$ mit den von $b \in B$ aufgestockt, d.h. für alle $b \in B$ und $b' \in C$ gilt

$$
\begin{aligned}
\alpha_i'(b') \cdot u_i(b') &= (\alpha_i(b') + \alpha_i(b)) \cdot u_i(b') \\
\alpha_i'(b') \cdot u_i(b') &= \alpha_i(b') \cdot u_i(b') + \alpha_i(b) \cdot u_i(b') \\
\implies \alpha_i'(b') \cdot u_i(b') &> \alpha_i(b') \cdot u_i(b') + \alpha_i(b) \cdot u_i(b)
\end{aligned}
$$

Somit folgt

$$
\sum_{b \in C} \left(\prod_{j \in N} \alpha_j'(b_j) \right) u_i(b) > \sum_{b \in B} \left(\prod_{j \in N} \alpha_j(b_j) \right) u_i(b) + \sum_{b \in C} \left(\prod_{j \in N} \alpha_j(b_j) \right) u_i(b)
$$

$$
\implies U_i(\alpha') > U_i(\alpha)
$$

□

Aufgabe 3.3

Nach dem Support-Lemma, können wir Strategie X für Spieler 2 ausschließen, da bei einem NG α^* für jede reine Strategie $a_i \in supp(\alpha_i^*)$ gelten muss $a_i \in B_i(\alpha_{-i}^*)$ mit $B_i(\alpha_{-i}^*) = \{a_i \in A_i \mid U_i(\alpha_{-1}^*, a_i) \geq U_i(\alpha_{-i}^*, a_i')$ für alle $a_i' \in A_i\}$, d.h. a_i ist eine beste Antwort auf α_{-i}^*. Nur B und S werden dieser Bedingung für Spieler 2 gerecht.

Mit Hilfe des Lemmas ermitteln wir nun die Wahrscheinlichkeitsverteilungen.

$$
\begin{aligned}
U_1(B, \alpha_2^*) &= 4 \cdot \alpha_2^*(B) \\
U_1(S, \alpha_2^*) &= 2 \cdot \alpha_2^*(S)
\end{aligned}
$$

Wir wissen, dass für ein NG $U_1(B, \alpha_2^*) = U_1(S, \alpha_2^*)$ gelten muss. Außerdem gilt $\alpha_2^*(B) + \alpha_2^*(S) = 1$. Wir stellen die erste Gleichung entsprechend um und setzen das Ergebnis mit der zweiten Gleichung gleich und lösen auf.

$$
\begin{aligned}
4 \cdot (1 - \alpha_2^*(S)) &= 2 \cdot \alpha_2^*(S) \\
4 - 4 \cdot \alpha_2^*(S) &= 2 \cdot \alpha_2^*(S) \\
-6 \cdot \alpha_2^*(S) &= -4 \\
\alpha_2^*(S) &= \frac{2}{3} \implies \alpha_2^*(B) = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Wir könnten α_1 auf gleiche Weise herleiten, jedoch ist dies durch die Symmetrie der Nutzenfunktion nicht notwendig. Trivialerweise folgt $\alpha_1^*(B) = \frac{2}{3}$ und $\alpha_1^*(S) = \frac{1}{3}$.

Somit haben wir das NG ermittelt, es hat folgende Auszahlungen: $U_1(\alpha^*) = \alpha_1^*(B) \cdot \alpha_2^*(B) \cdot u_1(B, B) + \alpha_1^*(S) \cdot \alpha_2^*(S) \cdot u_1(S, S) = \frac{4}{3} = U_2(\alpha^*)$.