Spieltheorie Übung 4

Eugen Sawin

June 4, 2012

Aufgabe 4.1

(a) Das Picknickspiel ist das Spiel $G = \langle \{1, 2\}, (A, B), (u_i) \rangle$ mit $A = B = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ und das (u_i) definiert durch die folgende Matrix.

		Spieler 2				
		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
	p_1	$0,0$	$1,2$	$1,3$	$1,4$	$1,5$
	p_2	$2,1$	$0,0$	$2,3$	$2,4$	$2,5$
Spieler 1	p_3	$3,1$	$3,2$	$0,0$	$3,4$	$3,5$
	p_4	$4,1$	$4,2$	$4,3$	$0,0$	$4,5$
	p_5	$5,1$	$5,2$	$5,3$	$5,4$	$0,0$

Seit (α, β) ein NG mit Nutzenprofil (u, v) im Spiel G, dann ist das LCP durch folgende Ungleichungen definiert.

$$
\begin{aligned}
&0 \le u - \beta(p_1) \cdot 0 - \beta(p_2) \cdot 1 - \beta(p_3) \cdot 1 - \beta(p_4) \cdot 1 - \beta(p_5) \cdot 1 && (1)\\
&0 \le u - \beta(p_1) \cdot 2 - \beta(p_2) \cdot 0 - \beta(p_3) \cdot 2 - \beta(p_4) \cdot 2 - \beta(p_5) \cdot 2 && (2)\\
&0 \le u - \beta(p_1) \cdot 3 - \beta(p_2) \cdot 3 - \beta(p_3) \cdot 0 - \beta(p_4) \cdot 3 - \beta(p_5) \cdot 3 && (3)\\
&0 \le u - \beta(p_1) \cdot 4 - \beta(p_2) \cdot 4 - \beta(p_3) \cdot 4 - \beta(p_4) \cdot 0 - \beta(p_5) \cdot 4 && (4)\\
&0 \le u - \beta(p_1) \cdot 5 - \beta(p_2) \cdot 5 - \beta(p_3) \cdot 5 - \beta(p_4) \cdot 5 - \beta(p_5) \cdot 0 && (5)\\
&0 \le v - \alpha(p_1) \cdot 0 - \alpha(p_2) \cdot 1 - \alpha(p_3) \cdot 1 - \alpha(p_4) \cdot 1 - \alpha(p_5) \cdot 1 && (6)\\
&0 \le v - \alpha(p_1) \cdot 2 - \alpha(p_2) \cdot 0 - \alpha(p_3) \cdot 2 - \alpha(p_4) \cdot 2 - \alpha(p_5) \cdot 2 && (7)\\
&0 \le v - \alpha(p_1) \cdot 3 - \alpha(p_2) \cdot 3 - \alpha(p_3) \cdot 0 - \alpha(p_4) \cdot 3 - \alpha(p_5) \cdot 3 && (8)\\
&0 \le v - \alpha(p_1) \cdot 4 - \alpha(p_2) \cdot 4 - \alpha(p_3) \cdot 4 - \alpha(p_4) \cdot 0 - \alpha(p_5) \cdot 4 && (9)\\
&0 \le v - \alpha(p_1) \cdot 5 - \alpha(p_2) \cdot 5 - \alpha(p_3) \cdot 5 - \alpha(p_4) \cdot 5 - \alpha(p_5) \cdot 0 && (10)\\
&0 \le \alpha(a) & \forall a \in A & (11)\\
&0 \le \beta(b) & \forall b \in B & (12)\\
&1 = \alpha(p_1) + \alpha(p_2) + \alpha(p_3) + \alpha(p_4) + \alpha(p_5) && (13)\\
&1 = \beta(p_1) + \beta(p_2) + \beta(p_3) + \beta(p_4) + \beta(p_5) && (14)\\
&0 = \alpha(a) \cdot (u - U_1(a, \beta)) & \forall a \in A & (15)\\
&0 = \beta(b) \cdot (v - U_2(\alpha, b)) & \forall b \in B & (16)
\end{aligned}
$$

Gleichungen (15) und (16) sind zu expandieren, wie in den Gleichungen (1)-(10) gezeigt. Außerdem müssen für die Normalform dafür zusätzliche Variablen eingeführt werden. Wir unterlassen beides um die Übersichtlichkeit zu erhalten. Auch (11) und (12) definieren insgesamt 10 Ungleichungen, für jede Aktion eine.

(b) Da der Tag nur 24 Stunden hat und ich ungerne ad-hoc Lösungen kreiere, habe ich mich entschieden diese Aufgabe auszulassen und den aufwendigeren, aber ordentlicheren Ansatz für das Projekt zu verfolgen $(nfg \to game \to LCP \to LP)$.

Aufgabe 4.2

(a) Das extensive Spiel ist $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)_{i \in N} \rangle$ mit

$$
\begin{aligned}
N &= \{R, E, K\} \\
H &= \{\langle\rangle, \langle r\rangle, \langle e\rangle, \langle r,b\rangle, \langle r,h\rangle, \langle e,b\rangle, \langle e,h\rangle, \langle r,b,b\rangle, \langle r,b,h\rangle, \langle r,h,b\rangle, \langle r,h,h\rangle, \langle e,b,b\rangle, \langle e,b,h\rangle, \langle e,h,b\rangle, \langle e,h,h\rangle\} \\
P(h) &= \begin{cases} K, & \text{falls } h = \langle\rangle \\ R, & \text{falls } h \in \{\langle r\rangle, \langle e,b\rangle, \langle e,h\rangle\} \\ E, & \text{falls } h \in \{\langle e\rangle, \langle r,b\rangle, \langle r,h\rangle\} \end{cases} \\
u_R(h) &= \begin{cases} 2, & \text{falls } h \in \{\langle r,b,b\rangle, \langle e,b,b\rangle\} \\ 1, & \text{falls } h \in \{\langle r,h,h\rangle, \langle e,h,h\rangle\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
u_E(h) = u_K(h) &= \begin{cases} 2, & \text{falls } h \in \{\langle r,h,h\rangle, \langle e,h,h\rangle\} \\ 1, & \text{falls } h \in \{\langle r,b,b\rangle, \langle e,b,b\rangle\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Der Spielbaum ist in Abbildung 1 zu sehen.

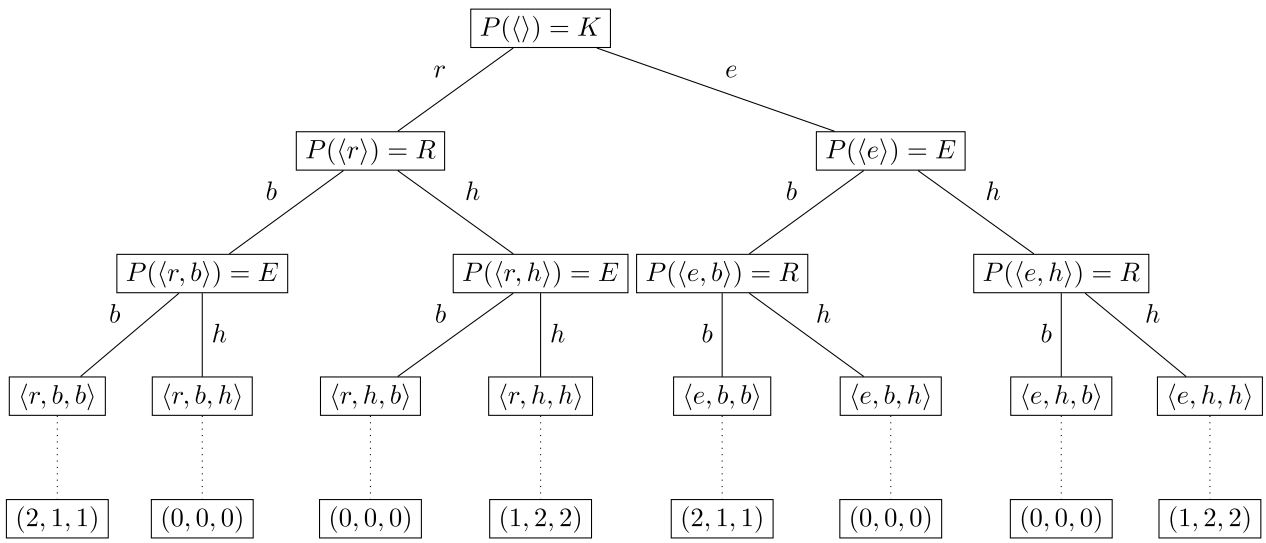

Figure 1: (4.2a) Spielbaum von Γ

(b) Die Strategien für Spieler R sind bbb, bbh, bhb, bhh, hbb, hbh, hhb und hhh.

(c) Wir geben die Profile als Tupel in der Form (s_R, s_E, s_K), wobei die s_i jeweils die Folge von Aktionen für Spieler i sind. Analog fassen wir die Auszahlungen in dem Tupel $u(h) = (u_R(h), u_E(h), u_K(h))$ zusammen. Um zu zeigen, dass Aktionsprofil $s^* = (bbb, hbh, r)$ ein TPG ist, reicht es dessen Auszahlung mit derer zu vergleichen, die für einen Spieler in einer Aktion abweichen.

Wir untersuchen nun alle solche Aktionsprofile, berücksichtigen dabei jedoch nur solche, die zu einer anderen Auszahlung führen, d.h. die abweichende Aktion liegt tatsächlich in dem Ergebnis.

Das Ergebnis $O(s^*) = \langle r, b, b\rangle$ hat die Auszahlungen $u_R(\langle r,b,b\rangle) = 2$ und $u_E(\langle r,b,b\rangle) = u_K(\langle r,b,b\rangle) = 1$, also $u(O(s^*)) = (2,1,1) = u^*$. Wir betrachten nun alle relevanten, abweichenden Aktionsprofile und deren Auszahlungen.

Spieler R kann in $h = \langle r\rangle$ von Aktion b auf h abweichen, was zu dem Aktionsprofil (hbb, hbh, r), dem Ergebnis $O((hbb, hbh, r)) = \langle r, h, h\rangle$ und der Auszahlung $u_R(\langle r,h,h\rangle) = 1$ führt. Wir sehen, dass diese Auszahlung geringer ist, als in u^*.

Spieler E kann in $h = \langle r, b\rangle$ von Aktion b auf h abweichen, was zu dem Aktionsprofil (bbb, hhh, r), dem Ergebnis $O((bbb, hhh, r)) = \langle r, b, h\rangle$ und der Auszahlung $u_E(\langle r, b, h\rangle) = 0$ führt. Wir sehen, dass diese Auszahlung geringer ist, als in u^*.

Spieler K kann in $h = \langle\rangle$ von Aktion r auf e abweichen, was zu dem Aktionsprofil (bbb, hbh, e), dem Ergebnis $O((bbb, hbh, e)) = \langle e, h, b\rangle$ und der Auszahlung $u_K(\langle e, h, b\rangle) = 0$ führt. Wir sehen, dass diese Auszahlung geringer ist, als in u^*.

Daraus folgt, dass $s^* = (bbb, hbh, r)$ ein TPG ist.