Spieltheorie Übung 2

Eugen Sawin

May 14, 2012

Aufgabe 2.1

(a) Sei (x^*, y^*) ein NG in $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$, dann gilt nach Satz 4

$$u_1(x^*, y^*) = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$$

Aus der Problembeschreibung folgt ein $G' = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u'_i) \rangle$ mit $u'_1(a) = u_1(a) + \alpha_a$ und $u'_2(a) = u_2(a) - \alpha_a$ mit $\alpha_a \geq 0$. α_a ist die Nutzwerterhöhung für Spieler 1 in Aktionsprofil a. Daraus folgt, dass für jedes NG (x', y') in G' folgendes gilt

$$\begin{aligned} & u'_1(x', y') = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u'_1(x, y) \\ \iff & u'_1(x', y') = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y) + \alpha_{(x,y)} \end{aligned}$$

Da $\alpha_a \geq 0$ gilt, folgt daraus

$$\begin{aligned} & u'_1(x', y') = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y) + \alpha_{(x,y)} \geq \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y) \\ \iff & u'_1(x', y') = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y) + \alpha_{(x,y)} \geq u_1(x^*, y^*) \end{aligned}$$

Somit gilt $u'_1(x', y') \geq u_1(x^*, y^*)$ für jedes NG (x', y') in G' und (x^*, y^*) in G. $\square$

(b) Für jedes NG (x^*, y^*) in G gilt

$$u_1(x^*, y^*) = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$$

O.B.d.A streichen wir nun Aktion $d \in A_1$ in dem Spiel G'. Sei $A'_1 = A_1 \setminus \{d\}$. Für jedes NG (x', y') in G' gilt nun

$$u_1(x', y') = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A'_1} u_1(x, y)$$

Aus den beiden Fällen $\max_{x \in A'_1} u_1(x, y) < u_1(d, y)$ für ein $y \in A_2$, und $\max_{x \in A'_1} u_1(x, y) = u_1(d, y)$ folgt

$$\begin{aligned} & u_1(x', y') = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A'_1} u_1(x, y) \leq \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y) \\ \iff & u_1(x', y') \leq u_1(x^*, y^*) \end{aligned}$$

Den Fall $\max_{x \in A'_1} u_1(x, y) > u_1(d, y)$ kann es nicht geben, da dann gilt $\exists y, y' \in A_2, x \in A_1, x' \in A'_1 : u_1(x', y') > u_1(x, y) \implies x' \notin A_1$, was in Widerspruch steht zu $A'_1 = A_1 \setminus \{d\} \implies A'_1 \subset A_1$. $\square$

Aufgabe 2.2

Wir zeigen folgendes Gegenbeispiel mit Spiel $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$, mit $A_1 = \{A,B\}$, $A_2 = \{C,D\}$, u_i ist durch die folgende Matrix definiert.

Spieler 1	Spieler 2: C	D
A	$1,-1$	$2,-2$
B	$1,-1$	$-1,1$

Wir sehen, dass (A,C) ein NG in G ist, jedoch nicht (B,C). $\square$

Aufgabe 2.3

(a) $a_i \in A_i$ ist in G strikt dominiert bedeutet:

$$\exists a_i' \in A_i \forall a \in A : u_i(a_{-i}, a_i') > u_i(a_{-i}, a_i)$$

Seien $\alpha_i \in \Delta A_i$ und $\beta_i \in \Delta A_i$ zwei unterschiedliche gemischte Strategien in G', bei den Wahrscheinlichkeitsverteilungen soll gelten $\alpha_i(a_i) > \beta_i(a_i)$. Entsprechend muss dann gelten, dass es ein $a_k \in A_i, a_k \neq a_i$ gibt mit $\alpha_i(a_k) < \beta_i(a_j)$. Es folgt

$$U_i(\alpha) = \sum_{a\in A} \prod_{j\in N} \alpha_j(a_j) \cdot u_i(a)$$
$$\text{und } U_i(\beta) = \sum_{a\in A} \prod_{j\in N} \beta_j(a_j) \cdot u_i(a)$$

Da wir bei α_i die Strategie mit niedrigerer Auszahlung wahrscheinlicher machen, sinkt die Gesamtauszahlung für Spieler i, d.h. $\alpha_i(a_i) \cdot u_i(a_{-i}, a_i) + \alpha_i(a_k) \cdot u_i(a_{-k}, a_k) < \beta_i(a_i) \cdot u_i(a_{-i}, a_i) + \beta_i(a_k) \cdot u_i(a_{-k}, a_k)$ und damit folgt $U_i(\alpha) < U_i(\beta)$. Die gemischte Strategie α_i wird also auch in G' strikt dominiert. Mit $\alpha_i(a_i) = 1$, $\beta_i(a_i) = 0$ ansonsten $\alpha_i(a_j) = \beta_i(a_j)$ für $i \neq j$ folgt, dass a_i strikt dominiert wird in G'. $\square$

(b) Sei ein G mit folgenden Nutzenfunktionen (in Matrixform) gegeben.

Spieler 1	Spieler 2: D	E
A	$2,0$	$2,0$
B	$2,0$	$1,0$
C	$1,0$	$2,0$

Wie man leicht erkennen kann, gibt es keine strikt dominierte Strategie in G.

Jedoch ist die Auszahlung der gemischten Strategie α_1 mit $\alpha_1(A) = 1$, $\alpha_1(B) = \alpha_1(C) = 0$ unabhängig von der Verteilung von Spieler 2 strikt besser als jede andere Verteilung für Spieler 1. Somit ist jede andere gemischte Strategie von α_1 strikt dominiert und es folgt, dass Strategien B und C strikt dominiert sind in unserem G'. $\square$

(c) Wir haben dies bereits indirekt in (a) gezeigt.

PS: Bei der Aufgabenlösung wurde angenommen, dass mit *stark dominiert* tatsächlich *strikt dominiert* gemeint war. Dazu wurde die tatsächliche Definition von strikt dominierten gemischten Strategien eigenständig hergeleitet, da diese nicht im Skript oder Vorlesung definiert worden war.